

Тогда $x_t = (1 - \alpha L)^{-1}(1 + \beta L)\epsilon_t = (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots)(1 + \beta L)\epsilon_t = \epsilon_t + \eta_1 \epsilon_{t-1} + \eta_2 \epsilon_{t-2} + \dots$, $\eta_1 = \alpha + \beta, \eta_2 = \alpha(\alpha + \beta), \dots, \eta_k = \alpha^{k-1}(\alpha + \beta)$. Начиная со второго коэффициенты убывают в геометрической прогрессии, следовательно, дисперсия ошибки прогноза на τ шагов:

$$\sigma_\epsilon^2 \sum_{i=0}^{\tau-1} \eta_i^2 = \sigma_\epsilon^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{\tau-1} \alpha^{2i} (\alpha + \beta)^2 \right) = \sigma_\epsilon^2 \left(1 + \frac{(\alpha + \beta)^2 (1 - \alpha^{2\tau})}{1 - \alpha^2} \right).$$

Для этой модели дисперсия ошибки прогноза асимптотически равна дисперсии временного ряда.

Во всех рассмотренных случаях условный точечный прогноз асимптотически приближался к математическому ожиданию ряда, а дисперсия ошибки прогноза - к дисперсии ряда. Это означает, что для стационарного процесса влияние имеющейся информации о реализации на прогноз и его точность асимптотически убывает до нуля. К тому же при увеличении горизонта прогноза дисперсия ошибки не превышает дисперсии временного ряда. Но этот результат является следствием нереалистического предположения о том, что коэффициенты модели известны точно.

Так же, как и в моделях множественной линейной регрессии, хорошее качество подгонки модели ARIMA не гарантирует высокой точности прогноза, т.е. высокой прогнозной силы. Для оценки прогнозных свойств модели одним из общеупотребительных приемов является разбиение имеющейся реализации на 2 части.

По первым n наблюдениям выбирается и оценивается модель, а по последним $(T - n)$ наблюдениям проводится сравнение наблюдаемых и рассчитанных по модели значений.

Такая процедура иногда называется **постпрогнозом**.

Нестационарные временные ряды

Модели типа ARMA охватывают все стационарные процессы, а с нестационарными временными рядами ситуация иная, фактически рассмотрим только частные виды нестационарных временных рядов. Один из таких видов уже начинал рассматриваться - $ARIMA(p, d, q)$. По определению модели $ARIMA(p, d, q)$, d - это степень интеграции ряда, т.е. ряд становится стационарным после применения d раз операции взятия последовательной разности.

Рассмотрим нестационарные ряды, которые могут быть приведены к стационарному виду с помощью взятия последовательных разностей. Было получено, что 2 разных по свойствам типа нестационарных рядов приводятся к стационарному виду с помощью взятия последовательных разностей:

1 тип. Процесс с детерминированным полиномиальным трендом

$x_t = P_k(t)$, где $P_k(t)$ - полином степени k от t , а ϵ_t - стационарный процесс, не обязательно белый шум.

Если ограничиться рассмотрением только линейного тренда $x_t = \alpha + \beta t + \epsilon_t$ то можно записать: $\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = (1 - L)x_t = \beta + (\epsilon_t - \epsilon_{t-1})$

$$x_t = a + bt + ct^2 + \epsilon_t$$

$$\Delta x_t = a + bt + ct^2 + \epsilon_t - (a + b(t-1) + c(t-1)^2 + \epsilon_{t-1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= (b - c) + 2ct + (\epsilon_t - \epsilon_{t-1}) \\
\Delta^2 x_t &= (b - c) + 2ct + (\epsilon_t - \epsilon_{t-1}) - ((b - c) + 2c(t - 1) + (\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2})) = \\
&= 2c + \epsilon_t - 2\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2}.
\end{aligned}$$

$\epsilon_t - 2\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2}$ — MA -часть.

Поскольку ϵ_t — стационарный процесс, то его первая разность также стационарный процесс, хотя если ϵ_t — белый шум, то появляется MA -часть. В случае полиномиального тренда для приведения к стационарному виду нужно взять последовательную разность несколько раз.

2 тип. Процесс случайного блуждания

$$x_t = \mu + x_{t-1} + \epsilon_t$$

В этом случае $\Delta x_t = \mu + \epsilon_t$, и процесс x_t называется случайным блужданием с дрейфом. Решение этого разностного уравнения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
x_t &= \mu + x_{t-1} + \epsilon_t = \mu + (\mu + x_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t = 2\mu + (\mu + x_{t-3} + \\
&\quad + \epsilon_{t-2}) + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t = 3\mu + x_{t-3} + \epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2} \\
x_t &= x_0 + \mu t + \sum_{j=0}^{t-1} \epsilon_{t-j}
\end{aligned}$$

Если применить подход Бокса-Дженкинса и, имея некоторую реализацию, перейти к разностям, оценить модель $ARMA(p, q)$, то чтобы вернуться назад к процессу x_t , нужно выбрать, по какой схеме возвращаться. Как мы уже рассматривали, эти процессы ведут себя по-разному. В чем-то они схожи: у обоих есть линейный тренд, но они отличаются случайной частью. В первом случайная часть — это текущий шок, текущие возмущения, а во втором — это накопленные возмущения от всех предыдущих шоков.

Ряд второго типа можно привести к стационарному виду только взятием первой разности, а ряд первого типа можно привести к стационарному виду как взятием разности, так и выделением линейного тренда. Например:

$$\begin{aligned}
x_t &= \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 + \epsilon_t \\
y_t &= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + z_t \\
z_t &= \epsilon_t + 2\epsilon_{t-1} + 3\epsilon_{t-2} + \dots + t\epsilon_t, \quad t = \overline{1, T}
\end{aligned}$$

Проведем операцию детрендрования:

$$\begin{aligned}
x_t^0 &= x_t - (\theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2) = \epsilon_t - \text{стационарный ряд} \\
y_t^0 &= y_t - (\alpha + \beta t + \gamma t^2) = z_t \\
D(z_t) &= D(\epsilon_t + 2\epsilon_{t-1} + 3\epsilon_{t-2} + \dots + t\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2(1 + 2 + \dots + t) = \sigma_\epsilon^2 t \frac{(t+1)}{2} \Rightarrow
\end{aligned}$$

Детрендрованный ряд y_t^0 — не стационарный ряд.

Вопрос: Применим ли такой подход выделения линейного тренда к случайному блужданию? Что произойдет, если на самом деле процесс является случайным блужданием, пусть даже для простоты с нулевым математическим ожиданием, т.е. имеет вид $\Delta x_t = \epsilon_t$, а мы построим регрессию на время вида $x_t = \alpha + \beta t + \epsilon_t$?

Для краткости введем следующие названия для этих типов нестационарных процессов.

1 тип. *Процесс, приводимый к стационарному путем выделения линейного тренда* - **TSP** (trend stationary process).

Это процесс вида $x_t = \alpha + \beta t + \epsilon_t$, он приводится к стационарному процессу путем включения в регрессию линейного тренда. Это, в принципе, процесс, у которого есть детерминированный тренд.

2 тип. *Процесс, приводимый к стационарному путем взятия первой разности* - **DSP** (diferencing stationary process).

Это процесс вида $x_t = \mu + x_{t-1} + \epsilon_t$.

Свойства процессов TSP и DSP

Процесс TSP	Процесс DSP
Не стационарен из-за непостоянного тренда.	Не стационарен из-за непостоянной дисперсии.
Конечная память о шоках, он забывает об ошибке на предыдущем шаге сразу. Если вместо белого шума будет стоять более общий процесс $ARMA(p, q)$, то, конечно, шоки сказываются некоторое время, но их влияние со временем ослабевает, т.е. процесс с конечной памятью в случайных воздействиях.	Так как в явном решении стоит сумма всех предыдущих ϵ , то шоки помнятся все время. Это процесс с бесконечной памятью. Экономически это не очень понятно, шоки не должны сказываться постоянно.

В 1984 г. была опубликована работа Нельсона и Канга, в которой они задались вопросом: что произойдет, если процесс является DSP, а мы будем выделять линейный тренд, как для процесса типа TSP? Их результаты были получены с помощью большого количества испытаний Монте-Карло и заключались в следующем.

1. Линейная регрессия случайного блуждания без дрейфа на время дает коэффициент множественной детерминации ряда $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$ $R^2 \approx 0,44$ независимо от размера выборки, т.е. R^2 значим даже для малого количества точек наблюдения.

2. Если дрейф присутствует ($\mu \neq 0$), то $R^2 > 0,44$ и зависит от размера выборки. Это интуитивно можно понять, потому что как только $\mu \neq 0$, появляется свой тренд-нестационарное среднее.

3. Также оказалось, что $R^2 \rightarrow 1$ при $T \rightarrow \infty$, т.е. для процесса DSP с дрейфом $R^2 \rightarrow 1$ при увеличении объема выборки. Это явление значимого коэффициента тренда, когда в истинном уравнении тренд отсутствует, было названо «**кажущиеся тренды**» (spurious trends).
4. Оценка дисперсии остатков составляет примерно 14% от истинной дисперсии случайного возмущения, т.е. оценка дисперсии сильно занижена. Процедура оценивания указывает на значимый тренд и малую дисперсию, хотя на самом деле процесс случайного блуждания характеризуется растущей без ограничений дисперсией.
5. Остатки регрессии оказываются коррелированными с коэффициентом корреляции, примерно равным $\rho_1 = 1 - \frac{10}{T}$
6. В этом случае t -статистика не годится для проверки гипотезы о значимости коэффициента при времени, поскольку она смещена в сторону принятия гипотезы о наличии линейного тренда.
7. Независимые случайные блуждания имеют высокую корреляционную зависимость.

Поясним свойство 7. Если взять 2 независимых случайных блуждания:

$$y_t = y_{t-1} + v_t$$

$$x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$$

где v_t , и ϵ_t - независимые белые шумы, и построить регрессию $y_t = \alpha + \beta x_t + \eta_t$, то предполагается, что коэффициент β будет незначим. Однако два независимых случайных блуждания показывают высокую регрессионную зависимость, коэффициент β оказывается значимым. Как можно это пояснить? Если оба процесса имеют значимые тренды, то они оба зависят от $t \Rightarrow$ процессы зависимы между собой. А это означает, что если каждая из величин, между которыми мы ищем регрессионную зависимость, является DS-процессом, то регрессия между ними является «кажущейся».

Таким образом, некоторые зависимости являются кажущимися. Например представляется, что связаны динамики денежной массы и инфляции, но не учтено, что оба процесса - DSP, и сделанный экономический вывод неправомерен. Этот результат Нельсона и Канга показывает опасность прямого применения обычного регрессионного анализа в том случае, когда данные являются типа DS.

Значимость этого результата особо подчеркнута более ранней, знаменитой работой Нельсона и Пlossера, которая связана с исследованием исторических макроэкономических рядов в США. Результат этого исследования показал, что практически все ряды макроэкономических показателей США, за исключением ряда уровня безработицы, оказались рядами типа DS, т.е. типа случайного блуждания с дрейфом. Это произвело впечатление разорвавшейся бомбы. Известный экономист Саргент заметил, что все, что сделано до сих пор в области макроэкономической динамики, подлежит пересмотру. Правда, дальнейшие исследования показали, что ситуация не столь драматична.

Две эти работы, Нельсона-Канга и Нельсона-Пlossера, заставили обратить внимание на то, что надо проводить четкое разграничение между рядами двух видов: DS и TS. Если тренд в модели типа TS отсутствует, то вопрос сводился к различию между стационарными и нестационарными рядами. Раньше мы рассматривали для этого поведение выборочной автокорреляционной функции.

Визуальное исследование поведения выборочной автокорреляционной функции, т.е. применение подхода Бокса-Дженкинса, не позволяет надежно выбрать, к какому из типов относится исследуемый ряд.

Необходим метод, позволяющий формально проводить различие между рядами типа TSP и DSP.

Рассмотрим модель: $x_t = \alpha + \rho x_{t-1} + \beta t + \epsilon_t$.

Эта модель вобрала в себя черты обеих моделей: TS и DS, и гипотезы о характере ряда можно записать в виде простых гипотез о ее параметрах:

$$H_0: \text{ряд является DS} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$H_1: \text{ряд является TS} \Rightarrow \rho < 1, (\epsilon - \text{не просто белый шум, а некоторый стационарный ряд})$$

Нулевая гипотеза относится к классу общих линейных гипотез.

При традиционном подходе для ее проверки нужно оценить 2 регрессии: $x_t = \alpha + \rho x_{t-1} + \beta t + \epsilon_t$, и $x_t = \alpha + x_{t-1} + \epsilon_t$. И затем проверить значимость разности остаточных сумм квадратов, используя F -статистику.

Рассмотрим другой подход для более простой версии этой модели: $x_t = \alpha + \rho x_{t-1} + \epsilon_t$, т.е. без включения линейного тренда.

В этом случае гипотезы принимают вид:

$$H_0: \rho = 1 \Rightarrow \text{ряд является DS.}$$

$$H_1: \rho < 1 \Rightarrow \text{ряд является TS.}$$

Проверим гипотезу о том, что $\rho = 1$ при помощи t -статистики.

После вычитания из обеих частей уравнения x_{t-1} его можно переписать в другом виде:

$$\Delta x_t = \alpha + (\rho - 1)x_{t-1} + \epsilon_t.$$

Пусть $\rho - 1 = \gamma$, тогда проверяемые гипотезы примут вид:

$$H_0 : \gamma = 0 \Rightarrow \text{ряд является DS},$$

$$H_1 : \gamma < 0 \Rightarrow \text{ряд является TS}.$$

В классической линейной регрессии для проверки такой гипотезы применяется односторонняя t -статистика. Но в случае выполнения нулевой гипотезы, ряд x_t является случайным блужданием, его дисперсия стремится к бесконечности при увеличении t , и $\frac{\hat{\gamma}}{s.e.(\hat{\gamma})}$, где $s.e.(\hat{\gamma})$ - оценка дисперсии $\hat{\gamma}$, не является распределением Стьюдента. Следовательно, и асимптотическое распределение этой статистики не является нормальным. Причиной является невыполнение условий Центральной предельной теоремы в этом случае. Критические точки этого распределения приходится рассчитывать численно, используя имитационное моделирование Монте-Карло. Впервые это распределение было выведено и затабулировано в работе Дикки и Фуллера и носит их имя. Тест, использующий для проверки типа нестационарности распределение статистики $\frac{\hat{\gamma}}{s.e.(\hat{\gamma})}$, при условии $\gamma = 0$, т.е. когда процесс принадлежит типу DS, называется **тестом Дикки- Фуллера**, и обозначается как **DF-тест**. При условии, что нулевая гипотеза о том, что $\gamma = 0$, выполнена, мы имеем процесс типа случайного блуждания (DSP). Именно для этого случая не работает t -статистика.

Позже МакКиннон расширил эти таблицы, рассмотрел некоторые другие случаи и предложил аппроксимирующие формулы для быстрого расчета критических точек в компьютерных программах. С помощью моделирования Дикки и Фуллер также рассчитали аналог F-статистики для случая, когда процесс является случайным блужданием. Это распределение также иногда называют распределением Дикки-Фуллера. Обычно из контекста ясно, о каком из распределений идет речь.

Вернемся к общей модели: $x_t = \alpha + \rho x_{t-1} + \beta t + \epsilon_t$. В этом случае мы имеем следующие гипотезы:

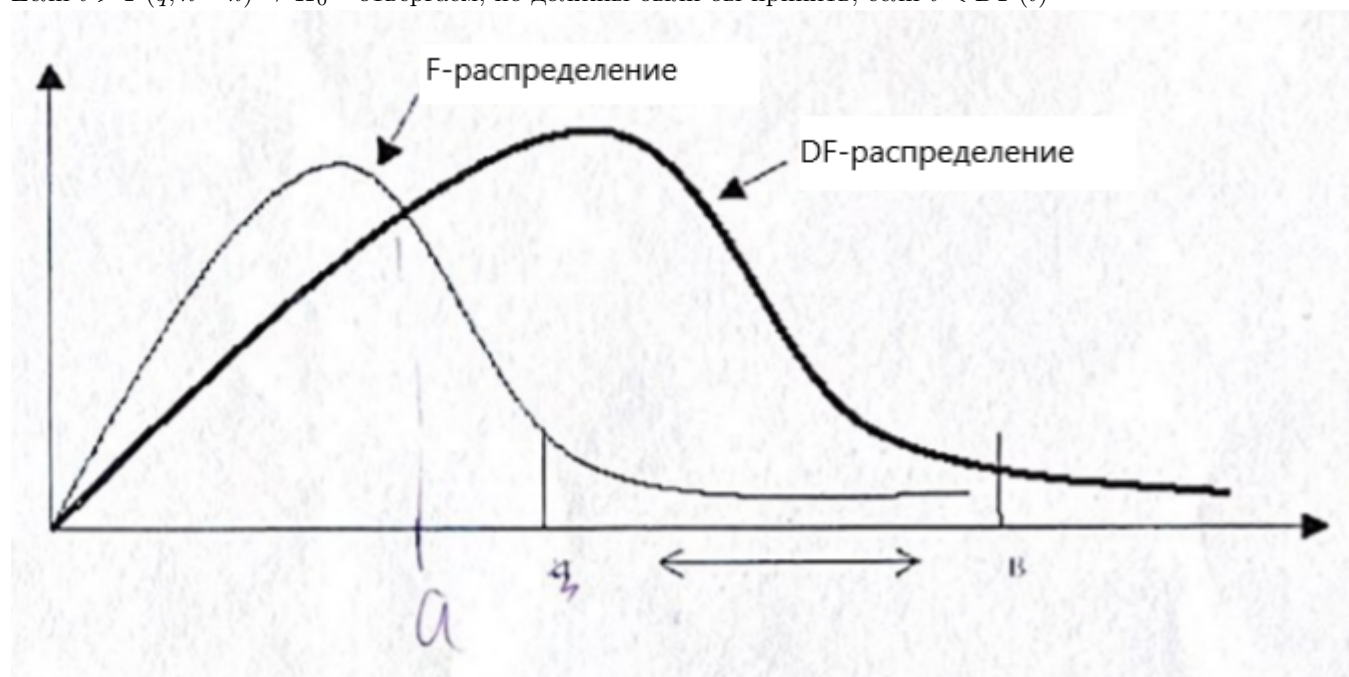
$$H_0 : \rho = 1, \beta = 0,$$

$$H_1 : \rho < 1,$$

Сравним, как ведет себя DF-статистика и F-статистика. Нас интересует критическое значение при заданном числе наблюдений и для заданного уровня значимости. Если n - количество наблюдений, то в зависимости от него получим следующую таблицу для уровня значимости 5%, в которой F-статистика - это фактически $F_{q,n-k}$, где $q = 2$ - число ограничений, $n - k = T - 3$ - число регрессоров.

T	DF	F-статистика
25	7,24	3,42
50	6,73	3,20
100	6,49	3,10
∞	6,25	3,00

Если $t > F(q, n - k) \Rightarrow H_0$ - отвергаем, но должны были бы принять, если $t < DF(t)$



На рисунке схематически показаны графики плотностей распределения Дикки-Фулера и Фишера. Видно, что DF-распределение значительно правее, чем F-распределение. Это означает, что в большом количестве случаев применение стандартной F-статистики ведет к тому, что мы считаем, что ряд относится к типу TS, в то время как он типа DS, а именно, если F-статистика попадает в область (а; b).

Лекция 9

Нестационарные временные ряды (продолжение)

Пример, иллюстрирующий поведение стационарных и нестационарных процессов.

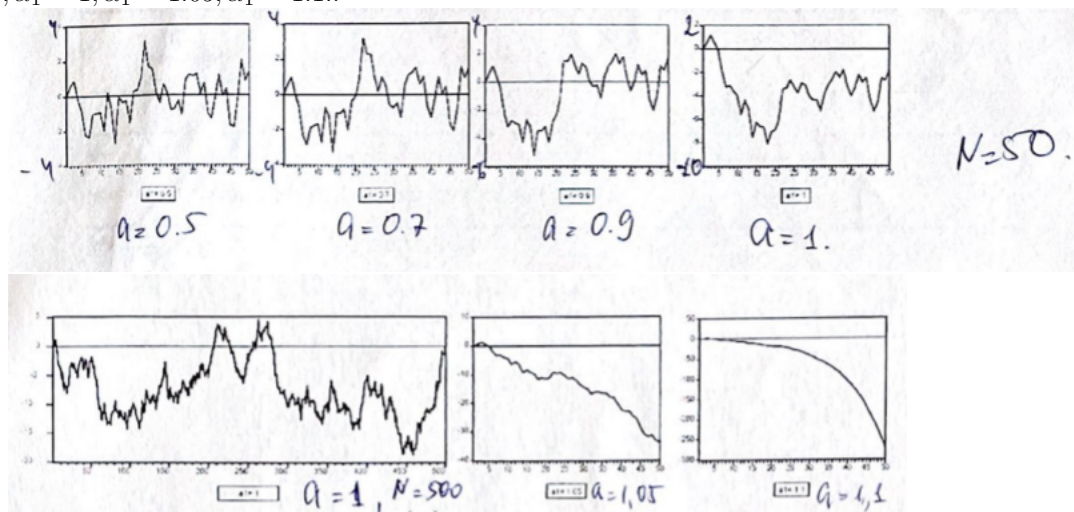
За основу возьмем наиболее простую модель - процесс AR(1):

$$x_t = \alpha x_{t-1} + \epsilon_t$$

Этот процесс является стационарным при выполнении условия: $-1 < \alpha_1 < 1$.

А как проявляется нестационарность ряда x_1 при нарушении этого условия?

Приведем смоделированные реализации такого ряда для следующих случаев: $\alpha_1 = 0.5, \alpha_1 = 0.7, \alpha_1 = 0.9, \alpha_1 = 1, \alpha_1 = 1.05, \alpha_1 = 1.1$.



Во всех случаях $x_1 = 1$, ϵ_t - белый гауссовский шум с $E\epsilon_t = 0$ и $Var(\epsilon_t) = 1$, математическое ожидание истинного процесса x_t равно единице, а поведение смоделированных рядов - различное.

Модель	Ко-во пересечений 0-го уровня	Среднее значение
Noise (белый шум)	25	-0,046
AR(1) $\alpha_1 = 0,5$	14	-0,097
AR(1) $\alpha_1 = 0,7$	8	-0,191
AR(1) $\alpha_1 = 0,9$	8	-0,649
AR(1) $\alpha_1 = 1,0$	1	-3,582
AR(1) $\alpha_1 = 1,05$	1	-13,511
AR(1) $\alpha_1 = 1,1$	1	-59,621

При возрастании значения α_1 , от $\alpha_1 = 0$ (белый шум) до $\alpha_1 = 1$ количество пересечений нулевого уровня уменьшается, все более длинными становя тся периоды, в течение которых значения ряда находятся по одну сторону от нулевого уровня.

Вспомним основные свойства TSP и DSP процессов, которые сформулировали на прошлой лекции.

TSP - процессы, приводимые к стационарному взятием линейного тренда, т.е. ряды типа TSP имеют линию тренда в качестве некоторой “центральной линии”, которой следует траектория ряда, находясь то выше, то ниже этой линии, с достаточно частой сменой положений выше-ниже.

DSP - процессы, приводимые к стационарному взятием последовательных разностей, т.е. ряды типа DSP помимо детерминированного тренда (если таковой имеется) имеют еще и стохастический тренд, из-за присутствия которого траектория DSP ряда весьма долго пребывает по одну сторону от линии детерминированного тренда (выше или ниже этой линии), удаляясь от нее на значительные расстояния, так что по-существу в этом случае линия детерминированного тренда перестает играть роль “центральной” линии, вокруг которой колеблется траектория процесса.

В TSP-рядах влияние предыдущих шоковых воздействий затухает с течением времени, а в DSP-рядах такое затухание отсутствует и каждый отдельный шок влияет с одинаковой силой на все последующие значения ряда. Поэтому наличие стохастического тренда требует проведения определенной экономической политики для возвращения макроэкономической переменной к ее долгосрочной перспективе, тогда как при отсутствии стохастического тренда серьезных усилий для достижения такой цели не требуется - в этом случае макроэкономическая переменная “скользит” вдоль линии тренда как направляющей, пересекая ее достаточно часто и не уклоняясь от этой линии сколько-нибудь далеко, (**лекция 8**).

Вопрос: Как правильно определить различия между TSP и DSP рядами для построения адекватной модели временного ряда, которую можно использовать для описания динамики ряда и прогнозирования его будущих значений?

Давайте займемся проблемой такой классификации.

Как оказалось, процедура Бокса-Дженкинса для отнесения ряда к одному из указанных двух классов: TSP или DSP на основании наблюдения реализации ряда на некотором интервале времени для этого не подходит.

В настоящее время существует множество процедур такой классификации, продолжают предлагаться новые процедуры, которые либо несколько превосходят старые в статистической эффективности (по крайней мере, теоретически) либо могут составить конкуренцию старым процедурам и служить дополнительным средством подтверждения классификации, произведенной другими методами.

При анализе конкретных макроэкономических временных рядов обычно применяют несколько разных статистических процедур, что позволяет несколько укрепить выводы, сделанные в пользу одной из двух (TSP или DSP) конкурирующих гипотез.

Таким образом, мы нуждаемся в методе, который позволит проводить формальные различия между TSP и DSP рядами.

Различение TSP и DSP рядов в классе моделей ARMA

Как уже отмечалось выше, для решения вопроса об отнесении исследуемого ряда x_t к классу TS (стационарных или стационарных относительно тренда) или DS (разностно стационарных) процессов имеется целый ряд различных процедур. Однако все эти процедуры страдают теми или иными недостатками. Процедуры, оформленные в виде формальных статистических критериев, как правило, имеют достаточно низкую мощность, что ведет к весьма частому неопровержению исходной (нулевой гипотезы), когда она в действительности не выполняется. В то же время невыполнение теоретических предпосылок, на которых основывается критерий, при применении его к реальным данным приводит к отличию реально наблюдаемого размера критерия от заявленного уровня значимости. Вследствие последнего обстоятельства теряется контроль над вероятностью ошибки первого рода, и это может приводить к слишком частому отвержению нулевой гипотезы, когда она в действительности верна. В связи с таким положением вещей исследователи обычно используют при анализе рядов на принадлежность их к классу TS или DS не один, а несколько критериев и подкрепляют выводы, полученные с использованием формальных критериев (с установленными уровнями значимости) графическими процедурами. Мы также рассмотрим несколько процедур различения TS и DS.

1. Гипотеза единичного корня

В большинстве критериев, предложенных для различения DS и TS гипотез, эта задача решается в классе моделей ARMA (стационарных и нестационарных).

Если ряд X_t имеет тип $ARIMA(p, d, q)$, то в результате его (d -кратного дифференцирования мы получаем стационарный ряд $\Delta^d x_t$, типа $ARMA(p, q)$:

$$\sum_{j=0}^p \alpha_j \Delta^d x_{t-1} = \sum_{j=0}^q \beta_j \epsilon_{t-1}$$

или

$$\alpha_p(L) \Delta^d x_t = \beta_q(L) \epsilon_t,$$

где $\alpha_p(L)$ и $\beta_q(L)$ - полиномы от оператора обратного сдвига L , имеющие степени p и q , соответственно. Заметим, что $\Delta x_t = (1 - L)x_t$, так что $\Delta^d x_t = (1 - L)^d x_t$ и $\alpha_p(L)(1 - L)^d x_t = \beta_q(L)\epsilon_t$ или $\alpha_p(L)x_t = \beta_q(L)\epsilon_t$ где $\alpha_p(L) = \alpha_p(L)(1 - L)^d$ - полином степени $(p + d)$.

Поскольку ряд $\Delta^d x_t$ стационарный, все p корней полинома $\alpha_p^*(z)$ находятся за пределами единичного круга, так что полином $\alpha_p^*(z)$ имеет p корней за пределами единичного круга и d корней на границе этого круга, а точнее, корень $z = 1$ кратности d .

Таким образом, ряд X_t представляется нестационарной моделью $ARM(p + d, q)$, в которой авторегрессионный полином $a(L)$ имеет ровно d корней, равных 1, а все остальные корни по модулю больше 1. Поэтому проверка нулевой гипотезы H_0 о том, что некоторый ARMA ряд X_t является DS-рядом (т.е. нестационарным рядом), может быть сведена к проверке гипотезы о том, что авторегрессионный полином $a(L)$ имеет хотя бы один корень, равный 1. Это оправданно, если исходить из предположения, что (z) не имеет корней внутри единичного круга, т.е. исключить из рассмотрения “взрывные” модели. При этом о гипотезе H_0 кратко говорят как о **гипотезе единичного корня** (*UR - unit root hypothesis*), хотя точнее было бы говорить о гипотезе авторегрессионного единичного корня. В качестве альтернативной тогда выступает **TS гипотеза** о том, что рассматриваемый ARMA ряд - стационарный.

Критерии, в которых за исходную (нулевую) гипотезу берется гипотеза TS, служат скорее для подтверждения результатов проверки DS-гипотезы. В этом случае вместо проверки гипотезы единичного корня у полинома $a(z)$ проверяется гипотеза о наличии единичного корня $z = 1$ у уравнения $b^*(z) = 0$, где $b^*(L)$ - полином от оператора обратного сдвига L в представлении в виде процесса скользящего среднего. $X_t = b^*(z) \in t$ ряда разностей. $X_t = X_t - X_{t-1}$ исходного процесса X_t .

$$\begin{aligned}
& H_0 : X \sim ARMA(p + d, q) \sim \text{DS-ряд} \Rightarrow \\
& \Rightarrow H_0 : \text{хотя бы 1 корень } z = 1 \text{ у полинома } \alpha_p(L) : \alpha_p(z) < 0 \\
& H_1 : X_t \sim ARMA(p + d, q) - \text{стационарный ряд} \\
\hline
& H_0 : X_t \sim ARMA(p + d, q) - \text{TS-ряд} \Rightarrow \\
& H_1 : z = 1 : b_q(z) = 0 \text{ полином} \\
& \quad b_1^*(z) = 0
\end{aligned}$$